# Логический вывод тождеств булевой алгебры

## 1) Ассоциативность дизъюнкции



Слева направо:

1.  - гипотеза

2. - гипотеза

3.  - закон де Моргана, (2)

4. - свойства конъюнкции, (3)

5. - дважды MP, (1) и (4).

Справа налево:

1.  - гипотеза

2. - гипотеза

3.  - гипотеза

4. - R8, (2) и (3)

5.  - MP, (1) и (4)

Заметим, что вывод справа налево построен без использования законов де Моргана, хотя можно было «сшить» конъюнкцию отрицаний из 2-го и 3-го шагов и заменить ее на отрицание соответствующей дизъюнкции (4 шаг).

Вывод слева направо тоже может быть проведен без использования законов де Моргана.

1.  - гипотеза

2. - гипотеза

3. - свойства дизъюнкции (или, что то же, секвенция 5)

4.  - R7, (3)

5. - MP, (2) и (4)

6. - MP, (1) и (5)

7. - схема (1) (или свойства дизъюнкции)

8.  - R7, (7)

9. - MP, (2) и (8)

10.  - MP, (6) и (9).

## 2) Ассоциативность конъюнкции



С использованием правил, основанных на свойствах конъюнкции, доказательство тривиально.

Рассмотрим поэтому доказательство без использования указанных правил.

Раскроем определение конъюнкции:



Снимая внешнее отрицание, сведем задачу к доказательству эквивалентности

.

Слева направо:

1.  - гипотеза

2.  - гипотеза

3. - секвенция (5)

4. - R7, (3)

5. - MP, (2) и (4)

6. - R3, (5)

7. - MP, (1) и (6)

8. - R3, (7)

9. - схема (1) при 

10. - R7, (9)

11. - MP, (2) и (10)

12. - R3, (11)

13. - MP, (8) и (12).

Итак, , ├.

Применяя теорему дедукции, получим утверждение о выводимости правой части из левой.

Справа налево:

1. - гипотеза

2. - гипотеза

3. - гипотеза (временно «забываем» про двойное отрицание)

4. - R4, (3)

5. - R8, (2) и (4)

6. - MP, (1) и (5).

Мы доказали секвенцию , , ├, то есть

, ├ , но  ├, откуда

├, что и требовалось.

## 3) Коммутативность дизъюнкции

1. - гипотеза

2. - правило R7 к шагу 1

3.  - секвенция 3

4. - R1 (секвенция 1), 2 и 3

Что и требовалось доказать.

## 4) Коммутативность конъюнкции

С использованием правил, основанных на свойствах конъюнкции, доказательство тривиально.

Без них:

1.  - гипотеза

2. - R7, (1)

3.  - секвенция 4

4. - R1, (3) и (2)

Итак, ├.

Обратную выводимость получим, просто меняя ролями буквы в написанной выше секвенции.

Следовательно, мы доказали эквивалентность , откуда

.

5) Идемпотентность дизъюнкции

6) Идемпотентность конъюнкции

Достаточно доказать, что

├ 

1. - гипотеза

2. - R4, (1)

3. - R8, (1) и (2)

## 7) Взаимная дистрибутивность

a) 

Слева направо:

1. - гипотеза

2. - гипотеза

3. - закон де Моргана

4. - свойства конъюнкции, (1)

5. - R4, (4)

6. - MP, (3) и (5)

7. - свойства конъюнкции, (1)

8. - MP, (6) и (7)

9. - свойства конъюнкции, (4) и (8).

Справа налево:

1. (A & B) ∨(A & C) = ¬(A & B)🡪 (A & C) – гипотеза;

2. A&C 🡪 A, C – свойства конъюнкции;

3. ¬(A & B)🡪A, C – R1, (1) и (2);

4. A&B 🡪 A – свойства конъюнкции;

5. A – R9, (3) и (4);

6. ¬B🡪¬(A & B) - свойства конъюнкции;

7. ¬B 🡪 (A & C) – R1, (6) и (1);

8. ¬B🡪C – R1, (7) и (3);

9. A&(¬B🡪C) = A&(B∨C)– свойства конъюнкции, (5) и (8).

**b) A∨(B&C) ≡ (A ∨B)& (A∨C)**

**1)** A∨(B&C) ├ (A ∨B)& (A∨C):

(1) A∨(B&C)=¬A→ B&C – гипотеза,

(2) B&C → C – теорема,

(3) ¬A→ C – секв. (1),

(4) B&C → B – теорема,

(5) ¬A→ B – секв. (1),

(6) (¬A→ C)&( ¬A→ B) = (A∨B)& (A∨C) – теорема.

**2)** (A ∨B)& (A∨C)├ A∨(B&C):

(1) (A ∨B)& (A∨C) – гипотеза,

(2) ¬A – гипотеза,

(3) A∨B= ¬A→ B – теорема (из шага (1)), свойства конъюнкции

(4) B – MP, (2) и (3)

(5) A∨C= ¬A→ C – теорема (из шага (1)), свойства конъюнкции

(6) C – MP, (2) и (5)

(7) B&C – свойства конъюнкции.

## 8) Тождества поглощения

Надо доказать эквивалентности

.

Поскольку секвенции ├ и ├  очевидны, докажем

├ и ├.

При выводе первой секвенции используем контрапозицию, то есть пишем:

1. - гипотеза

2.  - закон де Моргана, (1)

3. - схема (3) при 

4. - MP, (2) и (3)

5. - секвенция (5)

6. - MP, (4) и (5).

Вторая секвенция доказывается так:

1. - гипотеза

2.  - свойства конъюнкции

3. - R1, (1) и (2)

4. - теорема (идемпотентность дизъюнкции)

5. - MP, (3) и (4).

Доказано.

## 9) Нейтральные элементы

Положим .

Легко доказать эквивалентность ,или, что равносильно, .

Действительно,

1.  - гипотеза

2. - секвенция (3)

3. - закон де Моргана, (2)

4. - коммутативность конъюнкции

5. - R7, (4)

6. - MP, (3) и (5).

В обратную сторону:

1. - гипотеза

2. - закон де Моргана, (1)

3. - коммутативность дизъюнкции, (2)

4. - секвенция (4)

5. - R1, (4) и (3)

Теперь докажем следующие эквивалентности:



Для первой пары достаточно доказать секвенции:

a)├ и b)├ 

(a)

1. - гипотеза

2. - R7, (1)

3. - теорема

4. - R1, (3) и (2)

5. - теорема (тавтология)

6. - MP, (4) и (5)

7. - R3, (6)

(b) Используем контрапозицию

1. - гипотеза

2. - закон де Моргана, (1)

3. - R7, (2)

4. - теорема

5. - R4, (4)

6. - MP, (3) и (5)

7. - R3, (6)

Вторая пара эквивалентностей. Здесь достаточно доказать секвенции

c)├и d)  ├

(c )

1. - гипотеза

2. - свойства конъюнкции, (1)

3. - свойства конъюнкции, (1) и (2)

(d)



(можно и в виде вывода эту цепочку расписать).